Лекция 11

МАТЕМАТИКАЛЫҚ КҮТІМ (ЖАЛПЫ ЖАҒДАЙ)

Біздің негізгі мақсатымыз– жалпы ықтималдық кеңістігінде анықталған кез келген кездейсоқ шаманың математикалық күтімі ұғымын анықтау және оның қасиеттерін зерттеу. Математикалық анализ көзқарасы тұрғысынан алғанда $\xi = \xi(\omega)$ кездейсоқ шамасының математикалық күтімі деп өлшенетін функциядан ықтималдықтық өлшем бойынша алынған Лебег интегралын айтатын боламыз. Жолай біз математикалық күтімді есептеу формулаларын қорытып, сонымен бірге Лебег және Риман интегралдары арасындағы қатынастар туралы сұрақтарға назар аударамыз.

Математикалық күтімнің жалпы анықтамасы. Қасиеттері

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ жалпы ықтималдық кеңістігінде берілген $\xi = \xi(\omega)$ кездейсоқ шамасының математикалық күтімі (*орта мәні*) $M\xi$ арқылы белгіленеді және ол үш кезеңмен, алдымен қарапайым, сосын теріс емес, ақыр соңында кез келген кездейсоқ шама үшін анықталады.

1-анықтама. I. *Қарапайым* $\xi(\omega) = \sum_{i=1}^{n} x_i I_{A_i}(\omega)$, $A_i \in \mathcal{F}$, $A_i A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$, $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$, $n < \infty$, кездейсоқ шамасы үшін *анықтама бойынша*

$$M\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i P(A_i). \tag{1}$$

1-ескерту. Анықтамада x_i –лердің $(i = 1, 2, \dots,)$ әртүрлі болуы талап етілмегеніне, тек $A_1, A_2, \dots, A_n$ оқиғаларының Ω -ның *бөліктеуі* болуы талап етілгеніне назар аударыңыз. Егер $B_j = \{\omega : \xi(\omega) = y_j\}$, $y_j \neq y_l$ $(j \neq l)$, $j = 1,2,\dots, m < \infty$ болса, онда әрине $B_j = \bigcup_{i: x_i = y_j} \{\omega : \xi(\omega) = x_i\} = \bigcup_{i: x_i = y_j} A_i$, демек анықтама бойынша былай жаза аламыз:

$$M\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i P(A_i) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i: x_i = y_j} x_i P(A_i) = \sum_{j=1}^{m} y_j \sum_{i: x_i = y_j} P(A_i) = \sum_{j=1}^{m} y_j P(B_j).$$

II. $\xi \geq 0$. Онда мына лемма белгілі:

1-лемма. Кез келген теріс емес кездейсоқ шама ξ $(\xi \geq 0)$ үшін $0 \leq \xi_n \uparrow \xi$ шартын қанағаттандыратын ξ_n – қарапайым кездейсоқ шамалар тізбегі табылады.

$M\xi_n \leq M\xi_{n+1}$ болғандықтан, $\lim\limits_{n\to\infty} M\xi_n$ шегі әрқашан бар болады (ол $+\infty$ мәнін қабылдауы да мүмкін)

Анықтама бойынша, $\xi \geq 0$ үшін

$$M\xi = \lim_{n\to\infty} M\xi_n . \tag{2}$$

III. ξ **–** кез келген кездейсоқ шама. Онда ξ бірмәнді түрде былайша жазылады:

$$\xi = \xi^+ - \xi^-,$$

мұндағы $\xi^+ = max\,(\xi, 0)$, $\xi^- = -min(\xi, 0)$. $\xi^+ \geq 0$, $\xi^- \geq 0$ болғандықтан алдыңғы **II-** кезең бойынша $M\xi^+$ және $M\xi^-$ математикалық күтімдері анықталған.

Онда, *анықтама бойынша*

$$M\xi = M\xi^+ - M\xi^- . \tag{3}$$

Егер $min\left(M\xi^+, M\xi^-\right) < \infty$ болса, онда біз математикалық күтім $M\xi$ *бар болады* деп айтамыз. Сонымен, қарапайым кездейсоқ шамалар үшін математикалық күтім әрқашан бар және ақырлы болады; теріс емес кездейсоқ шамалар үшін $M\xi < \infty$ не $M\xi = +\infty$. Сол сияқты, егер $M\xi^+ < \infty$, $M\xi^- < \infty$ болса, онда $M\xi < \infty$; егер $M\xi^+ = +\infty$, $M\xi^- < \infty$ болса, онда $M\xi = +\infty$; егер $M\xi^+ < \infty$, $M\xi^- = +\infty$ болса, онда $M\xi = -\infty$. Тек $M\xi^+ = M\xi^- = +\infty$ болған жағдайда ғана математикалық күтім *анықталмаған*.

Математикалық күтімнің қарапайым қасиеттері

1⁰. *Сызықтық қасиеттері.*

Айталық $M\xi$, $M\eta$ және $M\xi + M\eta$ бар болатын, ал c – тұрақты шама болсын. Онда

$$M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta, \quad M(c\xi) = cM\xi .$$

2⁰. *Теріс еместік қасиеттері.*

Егер $\xi \geq 0$ болса, онда $M\xi \geq 0$.

Егер $M\xi$ мен $M\eta$ бар болатын, және $\xi \geq \eta$ болса, онда $M\xi \geq M\eta$.

3⁰. *Ақырлылық қасиеттері.*

Егер $M\xi < \infty$ болса, онда $M\left|\,\xi\,\right| < \infty$.

Егер $\left|\,\xi\,\right| \leq \eta$ және $M\eta < \infty$ болса, онда $M\xi < \infty$.

Егер $M\xi < \infty\,, M\eta < \infty$ болса, онда $M\,(\,\xi + \eta\,) < \infty$.

Математикалық күтімнің қасиеттерінің дәлелдеулері

I. *Қарапайым кездейсоқ шамалар жағдайы.*

1⁰. Айталық, ξ және η – қарапайым кездейсоқ шамалар болсын:

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i I_{A_i}(\omega), \qquad \eta = \sum_{j=1}^{m} y_j I_{B_j}(\omega),$$

мұндағы $A_i,\, B_j \in \mathcal{F}$, $A_i A_j = B_i B_j = \varnothing$ $(i \neq j)$, $\sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{j=1}^{m} B_j = \Omega$, $n,\, m < \infty$. Онда, егер $\omega \in A_i B_j$ болса, $\xi(\omega) + \eta(\omega) = x_i + y_j$, және оның үстіне $\{A_i B_j\}$ – Ω -ның бөліктеуі болады. Енді

$$\xi(\omega) + \eta(\omega) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(x_i + y_j\right) I_{A_i B_j}$$

болғандықтан, 1-анықтаманы және 1-ескертуді еске ала отырып, былай жаза аламыз:

$$M\,(\xi + \eta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(x_i + y_j\right) P\left(A_i B_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} P\left(A_i B_j\right) + \sum_{j=1}^{m} y_j \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i B_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i P(A_i) + \sum_{j=1}^{m} y_j P\left(B_j\right) = M\xi + M\eta\,,$$

өйткені $A_i = A_i \sum_{j=1}^{m} B_j = \sum_{j=1}^{m} A_i B_j$ және $P(A_i) = \sum_{j=1}^{m} P\left(A_i B_j\right)$, сол сияқты

$$P\left(B_j\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i B_j\right).$$

Егер c – тұрақты болса, онда $c\xi = \sum_{i=1}^{n} (c x_i) I_{A_i}$, демек

$$M\,(c\xi) = \; = \sum_{i=1}^{n} c x_i P(A_i) = c \sum_{i=1}^{n} x_i P(A_i) = cM\xi\,.$$

2^0. Егер $\xi \geq 0$ болса, онда (1)-формуладағы барлық $x_i \geq 0$, демек $M\xi \geq 0$. Егер де $\xi \geq \eta$ болса, онда $\xi = \eta + (\xi - \eta)$ және $M\xi = M\eta + M(\xi - \eta) \geq M\eta$, себебі $\xi - \eta \geq 0$ болғанынан $M(\xi - \eta) \geq 0$ болатыны шығады.

3^0. Бұл қасиеттің дәлелдеуі айқын.

II. *Теріс емес кездейсоқ шамалар жағдайы.*

1^0. Айталық $0 \leq \xi_n \uparrow \xi$, $0 \leq \eta_n \uparrow \eta$, мұндағы ξ_n, η_n – қарапайым кездейсоқ шамалар тізбектері болсын. Онда $0 \leq \xi_n + \eta_n \uparrow \xi + \eta,$ $M(\xi_n + \eta_n) = M\xi_n + M\eta_n$ және анықтама бойынша

$$M(\xi + \eta) = \lim_{n \to \infty} M(\xi_n + \eta_n) = \lim_{n \to \infty} M\xi_n + \lim_{n \to \infty} M\eta_n = M\xi + M\eta .$$

Егер $\xi \geq 0$ және $c \geq 0$ болса, онда $0 \leq \xi_n \uparrow \xi$ болғанынан $0 \leq c\xi_n \uparrow c\xi$ болатыны шығады, бұдан

$$M(c\xi) = \lim_{n \to \infty} M(c\xi_n) = c \lim_{n \to \infty} M\xi_n = cM\xi .$$

2^0. $0 \leq \xi_n \uparrow \xi$ болғанынан $0 \leq M\xi_n \uparrow M\xi$ болатыны шығады. Егер $\xi \geq \eta$ болса, онда $\xi = \eta + (\xi - \eta)$ болғанынан $M\xi = M\eta + M(\xi - \eta) \geq M\eta$ теңсіздігін аламыз.

3^0. $\xi \geq 0$ үшін $|\xi| = \xi$ және $M|\xi| = M\xi$. Егер $0 \leq \xi \leq \eta$ және $M\eta < \infty$ болса, онда $M\xi \leq M\eta$ теңсіздігінен $M\xi < \infty$ болатыны шығады.

III. *Кез келген кездейсоқ шамалар жағдайы.*

1^0. Егер $c > 0$ болса, онда $\xi = \xi^+ - \xi^-$ қатынасынан $c\xi = c\xi^+ - c\xi^-$ болатыны шығады; егер де $c < 0$ болса, онда $c\xi = |c|\xi^- - |c|\xi^+$. Бұлардан $M(c\xi) = cM\xi$ болатынын аламыз.

Енді $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$ аддитивтілік қасиетін дәлелделік.

Ең алдымен мынаны байқалық: егер $\xi = \xi_1 - \xi_2$, мұндағы $\xi_1 \geq 0$, $\xi_2 \geq 0$ болса, бұдан $\xi_1 = \xi^+ + \delta$, $\xi_2 = \xi^- + \delta$ болатыны шығады, мұндағы $\delta \geq 0$. Шындығында да $\xi = \xi^+ - \xi^- = \xi_1 - \xi_2$ теңдігінен $\xi_1 - \xi^+ = \xi_2 - \xi^- \geq 0$ теңсіздіктері шығады. Енді $\xi_1 - \xi^+ = \delta$ белгілеуін енгізсек, онда $\xi_2 = \xi^- + \delta$. Ары қарай, егер $M\xi_1 < \infty$, $M\xi_2 < \infty$ болса, онда $\xi = \xi_1 - \xi_2$ қатынасынан $M\xi = M\xi_1 - M\xi_2$ қатынасы шығатынын байқау қиын емес. Демек $\xi+\eta=\left(\xi^{+}+\eta^{+}\right)-\left(\xi^{-}+\eta^{-}\right)$ қатынасына әзір ғана дәлелденген теңдікті пайдаланып, былай жаза аламыз:

$$M(\xi+\eta)=M\left(\xi^{+}+\eta^{+}\right)-M\left(\xi^{-}+\eta^{-}\right),$$

бұдан $M(\xi+\eta)=M\xi+M\eta$ болатыны шығады. Бұл қортынды $M\xi$ және $M\eta$ ақырлы болған жағдай үшін дұрыс. $M\xi$ және $M\eta$ математикалық күтімдерінің біреуі шексіздікке тең болатын жағдай ұқсас талданады.

2⁰. $\xi\geq\eta$ және $M\xi$ мен $M\eta$ бар болғанынан $M\xi\geq M\eta$ шығатынын дәлелделік. $M\eta=-\infty$ жағдайы айқын (тривиалды). $M\eta>-\infty$ болсын деп есептелік. Онда $\xi=\eta+(\xi-\eta)$ жіктеуіне математикалық күтімнің аддитивтілік қасиетін $(M\xi=M\eta+M(\xi-\eta))$ қолданып және $M(\xi-\eta)\geq 0$ теңсіздігін пайдаланып, нәтижесінде $M\xi\geq M\eta$ болатынын аламыз.

3⁰. $\xi=\xi^{+}-\xi^{-}$ болса, онда $|\xi|=\xi^{+}+\xi^{-}$. Демек $M|\xi|=M\xi^{+}+M\xi^{-}$. Онда $M\xi=M\xi^{+}-M\xi^{-}<\infty$ болғанынан $M|\xi|<\infty$ болатыны шығады. **3⁰**-қасиетінің қалғандары оп-оңай тексеріледі.

Мультипликативтік қасиет

1-теорема (*математикалық күтімнің мультипликативтік қасиеті*). Егер $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ тәуелсіз және $M\xi_i<\infty$ $(i=1,2,...,n)$ болса, онда $M(\xi_1\xi_2\cdot...\cdot\xi_n)<\infty$ және

$$M(\xi_1\xi_2\cdot...\cdot\xi_n)=M\xi_1\cdot M\xi_2\cdot...M\xi_n\,. \tag{4}$$

Дәлелдеуі. Қарапайымдылық үшін $n=2$ $(\xi_1=\xi,\ \xi_2=\eta)$ болатын жағдайды қарастыралық. Айталық ξ,η - *қарапайым* кездейсоқ шамалар болсын:

$$\xi=\sum_{i=1}^{n}x_i I_{A_i}(\omega),\quad \eta=\sum_{j=1}^{m}y_j I_{B_j}(\omega)\quad\left(n,m<\infty,\quad \sum_{i=1}^{n}A_i=\sum_{j=1}^{m}B_j=\Omega\right).$$

Онда $\xi\eta=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i y_j I_{A_iB_j}(\omega)$, ξ мен η тәуелсіз болғандықтан $P(A_iB_j)=P(A_i)P(B_j)$, демек (анықтама бойынша)

$$M\xi\eta=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i y_j P(A_i)P(B_j)=\sum_{i=1}^{n}x_i P(A_i)\cdot\sum_{j=1}^{m}y_j P(B_j)=M\xi\cdot M\eta\,.$$

Егер $\xi \geq 0, \quad \eta \geq 0$ болса, онда лемма бойынша $0 \leq \xi_n = \varphi_n(\xi) \uparrow \xi$, $0 \leq \eta_n = g_n(\eta) \uparrow \eta$ шарттарын қанағаттандыратын ξ_n, η_n теріс емес қарапайым кездейсоқ шамалар тізбектері табылады және тәуелсіз кездейсоқ шамалардың функциялары ретінде ξ_n мен η_n тәуелсіз кездейсоқ шамалар болады, оның үстіне $0 \leq \xi_n \eta_n = \varphi_n(\xi) g_n(\eta) \uparrow \xi \cdot \eta$. Бұдан

$$M\xi\eta = \lim_{n\to\infty} M\xi_n\eta_n = \lim_{n\to\infty}\left(M\xi_n \cdot M\eta_n\right) = \lim_{n\to\infty} M\xi_n \cdot \lim_{n\to\infty} M\eta_n = M\xi \cdot M\eta$$

(жолай біз қарапайым кездейсоқ шамалар үшін мультипликативтік қасиеттің дұрыстығын пайдаландық).

Жалпы жағдайда $\xi = \xi^+ - \xi^-$, $\eta = \eta^+ - \eta^-$, $\xi^\pm$ және $\eta^\pm$ тәуелсіз теріс емес кездейсоқ шамалар. Онда теріс емес кездейсоқ шамалар үшін математикалық күтімнің мультипликативтік қасиеті бойынша $M\xi^\pm\eta^\pm = M\xi^\pm \cdot \eta^\pm$, ендеше

$$M(\xi\eta) = M\left(\left(\xi^+ - \xi^-\right)\cdot\left(\eta^+ - \eta^-\right)\right) = M\left(\xi^+\eta^+ - \xi^+\eta^- - \xi^-\eta^+ + \xi^-\eta^-\right) =$$

$$= M\xi^+\eta^+ - M\xi^+\eta^- - M\xi^-\eta^+ + M\xi^- M\eta^- = M\xi^+ \cdot M\eta^+ - M\xi^+ \cdot M\eta^- -$$

$$- M\xi^- \cdot M\eta^+ + M\xi^- \cdot M\eta^- = \left(M\xi^+ - M\xi^-\right)\left(M\eta^+ - M\eta^-\right) = M\xi \cdot M\eta . \qquad \blacktriangledown$$

Математикалық күтімді есептеу формулалары

Лебег интегралы. $M\xi(\omega)$ әдетте $\int_\Omega \xi(\omega)P(d\omega)$ (немесе $\int_\Omega \xi(\omega)dP(\omega)$, немесе $\int_\Omega \xi\, dP$) арқылы белгіленеді және $P -$ *ықтималдықтық өлшемі бойынша Лебег интегралы* деп аталады. Анықтама бойынша $A \in F$ үшін былай жазамыз:

$$M(\xi I_A) = \int_A \xi(\omega)P(d\omega) = \int_\Omega \xi(\omega)I_A(\omega)P(d\omega). \qquad (7)$$

Жеке жағдайда

$$MI_A = \int_A P(d\omega) = P(A). \qquad (8)$$

3-ескерту. Жоғарыда берілген Лебег интегралының анықтамасында P өлшемі ықтималдықтық өлшем $(P(\Omega)=1)$, ал ξ F -өлшенетін функциялары (кездейсоқ шамалары) мәндерін $R = (-\infty, +\infty)$ жиынында қабылдайтын функциялар болады. Енді $\mu - (\Omega, F)$-өлшенетін кеңістігінде берілген және $+\infty$ мәнін де қабылдауы мүмкін кез келген өлшем, ал $\xi = \xi(\omega)$- мәндерін $\overline{R} = [-\infty, +\infty]$ жиынында қабылдайтын $\mathcal{F}$ - өлшенетін функция (кеңейтілген кездейсоқ шама) болсын. Бұл жағдайда да $\int_{\Omega} \xi(\omega)\mu(d\omega)$ интегралы (Лебег интегралы) жоғарыдағыдай әдіспен, алдымен ξ теріс емес қарапайым кездейсоқ шамалары үшін (1)-формуламен (тек P –ны μ –ге ауыстыру керек), сосын кез келген теріс емес кездейсоқ шамалар үшін, ал жалпы жағдайда (егер $\infty - \infty$ типті анықталмағандық пайда болмаса)

$$\int_{\Omega} \xi(\omega)\mu(d\omega) = \int_{\Omega} \xi^{+}(\omega)\mu(d\omega) - \int_{\Omega} \xi^{-}(\omega)\mu(d\omega)$$

формуласымен анықталады.

Математикалық анализ үшін $(\Omega, \mathcal{F}) = (R, \beta(R))$, ал μ-Лебег өлшемі болатын жеке жағдай аса маңызды. Бұл жағдайда $\int_{R} \xi(x)\mu(dx)$ интегралын әдетте $\int_{R} \xi(x)dx$, немесе $\int_{-\infty}^{+\infty} \xi(x)dx$, немесе $(L)\int_{-\infty}^{+\infty} \xi(x)dx$ арқылы белгілейді де, интегралдардың айырмашылығын көрсету үшін сәйкес Риман интегралын $(R)\int_{-\infty}^{+\infty} \xi(x)dx$ арқылы белгілейді. Егер Лебег-Стильтес өлшемі ретінде μ қандай да бір $G = G(x)$ жалпыланған үлестірім функциясына сәйкес өлшем болса, онда $\int_{R} \xi(x)\mu(dx)$ интегралын *Лебег-Стильтес интегралы* деп те атайды және оны сәйкес $(R-S)\int_{R} \xi(x)G(dx)$ *Риман-Стильтес* интегралынан ажырату үшін $(L-S)\int_{R} \xi(x)G(dx)$ арқылы белгілейді.

5-теорема *(Лебег интегралында айнымалыны ауыстыру формуласы).* Егер $\xi = \xi(\omega)$ - $(\Omega, \mathcal{F})$ кеңістігіндегі кездейсоқ шама, $g = g(x)$ – борелдік функция болса, онда $A \in \beta(R)$ үшін

$$\int_{A} g(x)P_{\xi}(dx) = \int_{\xi^{-1}(A)} g(\xi(\omega))P(d\omega), \tag{9}$$

мұндағы P_{ξ} ξ – дің ү*лестірім заңы* $\left(P_{\xi}(B) = P\{\omega : \xi(\omega) \in B\},\ B \in \beta(R)\right)$.

$A = R$ болатын жеке жағдайда

$$Mg(\xi(\omega)) = \int_{\Omega} g(\xi(\omega))P(d\omega) = \int_{R} g(x)P_{\xi}(dx). \tag{9'}$$

Дәлелдеу. Айталық $A \in \beta(R)$ және $g(x) = I_B(x)$, $B \in \beta(R)$, болсын. Онда $g(\xi(\omega)) = I_B(\xi(\omega)) = I_{\xi^{-1}(B)}(\omega)$ және

$$\int_A g(x)P_\xi(dx) = \int_A I_B(x)P_\xi(dx) = \int_{AB} P_\xi(dx) = P_\xi(AB) = P\{\xi^{-1}(AB)\} =$$

$$= \int_{\xi^{-1}(AB)} P(d\omega) = \int_{\xi^{-1}(A)} I_{\xi^{-1}(B)}(\omega)P(d\omega) = \int_{\xi^{-1}(A)} g(\xi(\omega))P(d\omega).$$

Ары қарай, дәлелдеуге тиісті формуланың теріс емес қарапайым $g(x)$ функциясы үшін дұрыстығы қазір ғана дәлелденген қатынастан шығады. Кез келген теріс емес борелдік $g(x)$ үшін тұжырымның дұрыстығы монотонды жинақталу туралы теореманың салдары. Жалпы жағдайда $g(x)$ функциясын $g(x) = g^+(x) - g^-(x)$ түрінде жазу керек те, айнымалыны ауыстыру формуласы жеке-жеке, $g^+(x)$ және $g^-(x)$ үшін дұрыс болатынын және, мәселен, егер $\int_A g^+(x)P_\xi(dx) < \infty$ болса, онда $\int_{\xi^{-1}(A)} g^+(\xi(\omega))P_\xi(d\omega) < \infty$, яғни $\int_A g(x)P_\xi(dx)$ бар болатынынан $\int_{\xi^{-1}(A)} g(\xi(\omega))P(d\omega)$ интегралының бар болатыны шығатынын байқау жеткілікті.

▼

4-ескерту. P_ξ өлшемі $F_\xi(x) = P\{\xi \le x\}$ үлестірім функциясы бойынша бірмәнді анықталады (бұл $P_\xi(a,b] = F_\xi(b) - F_\xi(a)$ болатындығынан және ықтималдықты жалғастыру туралы теоремадан шығады), сондықтан $\int_R g(x)P_\xi(dx)$ интегралын әдетте $\int_R g(x)F_\xi(dx)$ (немесе $\int_R g(x)dF_\xi(x)$) арқылы белгілейді де, оны $F_\xi(x)$ үлестірім функциясына сәйкес өлшем бойынша *Лебег-Стильтес интегралы* деп атайды.

Салдарлар (*математикалық күтімді есептеу формулалары*).

1. Егер ξ *абсолютті үзіліссіз* кездейсоқ шама, ал $g(x)$ – борелдік функция болса, онда $\eta = g(\xi)$ кездейсоқ шамасының математикалық күтімін мына формулалар арқылы есептеуге болады:

$$Mg(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} yf_\eta(y)dy, \tag{10}$$

мұндағы $f_\xi(x)$ және $f_\eta(y)$ (егер бар болса) сәйкес ξ және $\eta = g(\xi)$ кездейсоқ шамаларының үлестірім тығыздықтары, ал интегралдар $g(x)f_\xi(x)$ және $yf_\eta(y)$ функцияларынан Лебег өлшемі бойынша алынған Лебег интегралдары.

2. Егер ξ – $x_1, x_2, ...$ мәндерін қабылдайтын дискретті кездейсоқ шама болса, онда $\eta = g(\xi)$ кездейсоқ шамасының математикалық күтімін

$$Mg(\xi) = \sum_i g(x_i)P\{\xi = x_i\} = \sum_j y_j P\left\{g(\xi) = y_j\right\}, \qquad (11)$$

формулалары арқылы есептеуге болады, мұндағы

$$\left\{g(\xi) = y_j\right\} = \bigcup_{i:g(x_i)=y_j} \{\xi = x_i\}.$$

Дәлелдеулері. **1.** $f_\xi(x)$ функциясы $F_\xi(x)$ үлестірім функциясына сәйкес үлестірім тығыздығы болсын, яғни

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(y)dy,$$

болсын, мұндағы интеграл $f_\xi(y)$ функциясынан $(-\infty,\ x]$ жиынында лебегтік өлшем бойынша алынған Лебег интегралы.

Алдымен $g(x)$ функциясы қандай да бір борелдік жиынның индикаторы болатын жағдайды қарастыралық: $g(x) = I_B(x)$, $B \in \beta(R)$. Онда интегралдың анықтамасы бойынша

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} I_B(x)f_\xi(x)dx = \int_B f_\xi(x)dx = P_\xi(B).$$

Соңғы қатынастың дұрыстығы $F_\xi(b) - F_\xi(a) = \int_a^b f_\xi(x)dx$ формуласынан және ықтималдықтарды жалғастыру туралы теоремадан шығады: бізде $P_\xi(a,b] = F_\xi(b) - F_\xi(a)$. Ары қарай қазір ғана дәлелденген теоремадағы әдісті қолданып, (10)-қатынастың ортасындағы формуланың жалпы жағдайда да дұрыс болатындығын аламыз. Ал (10)-қатынастың оң жағындағы шеткі формула ортаңғы формуланың салдары (жеке жағдайы).

5-ескерту. Соңғы формулаларға ұқсас математикалық күтімді есептеу формулалары жалпы $g = g(x_1, x_2, \dots, x_m)$ борелдік функциясы R^m-ді R^1-ге бейнелейтін жағдайда да дұрыс. Дәлірек айтсақ, егер $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ векторының үлестірім функциясы $F_{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ болса, онда математикалық күтімді есептеудің келесі формуласы дұрыс:

$$Mg(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, x_2, \dots, x_m)dF_{\xi_1,\dots,\xi_m}(x_1, \dots, x_m). \qquad (12)$$

Жеке жағдайда, егер ξ абсолютті үзіліссіз вектор болса, онда

$$Mg\,(\xi_1,\dots,\xi_m) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x_1,\dots,x_m) f_{\xi_1,\dots,\xi_m}(x_1,\dots,x_m)dx_1\cdot dx_2\cdot\ldots\cdot dx_m\,, \qquad (13)$$

мұндағы $f_{\xi_1,\dots,\xi_m}(x_1,\dots,x_m)$ функциясы $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_m)$ векторының үлестірім тығыздығы.

Әрине, (12)-(13) интегралдарды (көп өлшемді) Лебег өлшемі бойынша алынған Лебег интегралдары ретінде түсіну қажет (Лебег интегралының бір немесе көп өлшемді жағдайларға тәуелсіз түрде құрастырылғанына назар аударыңыз).

Егер де $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_m)$ дискретті вектор болса, онда

$$Mg\,(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m) = \sum_{i,j,\dots,k} g(x_i, y_j,\dots,z_k) P\{\xi_1 = x_i,\ \xi_2 = y_j,\dots,\xi_m = z_k\} \qquad (14)$$

формуласы дұрыс.

Мысалдар

Дискретті кездейсоқ шаманың сандық сипаттамаларын (математикалық күтімін, дисперсиясын, моменттерін) есептеудің бірқатар мысалдарын бұрын келтіргенбіз. Сондықтан да қазір біз төменде негізінен (абсолютті) үзіліссіз кездейсоқ шамалар жағдайын қарастыратын боламыз.

1. *Бірқалыпты үлестірілген, көрсеткіштік* және *нормаль* кездейсоқ шамалардың математикалық күтімдері мен дисперсияларын есептелік.

Шешуі. Егер ξ кездейсоқ шамасы $[a,b]$ ($a < b$) аралығында бірқалыпты үлестірілген болса, онда (10)-формула бойынша

$$\mathrm{M}\xi = \int\limits_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}dx = \frac{a+b}{2}.$$

Параметрі λ -ға тең көрсеткіштік кездейсоқ шама үшін

$$M\xi = \int\limits_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}.$$

Егер $\xi \sim N\ (a,\sigma^2)$ болса, онда

$$M\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\sigma\, y + a)e^{-\frac{y^2}{2}}dy\,.$$

Біз алдыңғы интегралда $x = a + \sigma y$ ауыстыруын жасадық. Енді соңғы интегралды екі интегралдың қосындысы ретінде жазсақ, онда оның алғашқысы нөлге тең (себебі интеграл астындағы $y\exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}$ функциясы тақ функция), ал екіншісі a – ға тең, өйткені белгілі Пуассон интегралы бойынша

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sqrt{2\pi}\ .$$

Сонымен, $\xi \sim N\ (a,\sigma^2)$ болса, онда $a = M\,\xi$, яғни нормаль үлестірімдегі параметр a – ның мағынасы- кездейсоқ шаманың орта мәні (математикалық күтімі) екен.

Енді кездейсоқ шамалардың дисперсияларын есептелік.

$[a,b]$ аралығында бірқалыпты үлестірілген ξ кездейсоқ шамасы үшін дисперсияның анықтамасы және (10)-формула бойынша

$$D\xi = M\left(\xi - M\xi\right)^2 = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{(b-a)^2}{12}\ .$$

Параметрі λ -ға тең көрсеткіштік кездейсоқ шама үшін

$$D\xi = \int_0^{\infty} \left(x - \frac{1}{\lambda} \right)^2 \cdot \lambda\, e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2}\ .$$

$\xi \sim N\ (a,\sigma^2)$ үшін дисперсияның анықтамасы және (10)-формула бойынша

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x-a\right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sigma^2\ ,$$

себебі

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y d\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \right) = -\frac{y}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 1\ .$$

Сонымен нормаль кездейсоқ шама $\xi \sim N\ (a,\sigma^2)$ үшін параметр σ^2-тың мағынасы- дисперсия, ал σ -орташа квадраттық ауытқу болады екен.

2. $\xi \sim N\ (0,\sigma^2)$ үшін n – ші момент $M\xi^n$ неге тең болатынын табалық.

Шешуі. Тағы да (10)-формула бойынша

$$a_n = M\xi^n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^{n-1} d\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right) =$$

$$= \sigma^2 (n-1) \int_{-\infty}^{+\infty} x^{n-2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = (n-1)\sigma^2 a_{n-2}\ .$$

Демек, a_n үшін

$$a_n = (n-1)\sigma^2 a_{n-2}, \quad n = 2,3,...$$

рекурренттік қатынасын аламыз. Әрине, егер $n = 2k+1$ – тақ сан болса, онда $a_n = a_{2k+1} = 0$ (k=0,1,2,…). Егер n жұп, яғни $n=2k$ болса, онда соңғы рекурренттік қатынастардан ($a_0 = 1$ болатынын еске алсақ)

$$\begin{aligned} a_{2k} &= (2k-1)\sigma^2 a_{2k-2} = (2k-1)(2k-3)\sigma^2\sigma^2 a_{2k-4} = \\ &= .... = (2k-1)(2k-3)\cdot ...\cdot 3\cdot 1\sigma^{2k}. \end{aligned}$$

Сонымен $\xi \sim N(0,\sigma^2)$ кездейсоқ шамасы үшін $M\xi^{2k+1} = a_{2k+1} = 0 \quad (k = 0,1,...)$, $M\xi^{2k} = a_{2k} = (2k-1)!!\sigma^{2k} \quad (k = 1,2..)$.

3. $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ векторы $K = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \max\limits_{1\le i\le 3} |x_i| \le \sqrt{3} \right\}$ кубында бірқалып-ты үлестірілген. $\operatorname{cov}(\xi,\xi) = \left\| \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) \right\|_{i,j=1}^{3}$ ковариациялық матрицасын табыңыз.

Шешуі. Бізде бірлескен үлестірім тығыздығы

$$f_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} \dfrac{1}{|K|} = \dfrac{1}{\left(2\sqrt{3}\right)^3}, & (x_1,x_2,x_3) \in K, \\ 0, & (x_1,x_2,x_3) \notin K. \end{cases}$$

Бұдан, егер $-\sqrt{3} \le |x_1|, |x_2| \le \sqrt{3}$ болса, онда

$$f_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}(x_1,x_2,x_3)dx_3 = \frac{1}{\left(2\sqrt{3}\right)^3}\int\limits_{-\sqrt{3}}^{+\sqrt{3}} dx_3 = \frac{1}{\left(2\sqrt{3}\right)^2},$$

егер $-\sqrt{3} \le x_1 \le \sqrt{3}$ болса, онда

$$f_{\xi_1}(x_1) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)dx_2 = \frac{1}{\left(2\sqrt{3}\right)^2}\int\limits_{-\sqrt{3}}^{+\sqrt{3}} dx_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Қалған тығыздықтар ұқсас анықталады. Ендеше

$$M\xi_i = \frac{1}{2\sqrt{3}}\int\limits_{-\sqrt{3}}^{+\sqrt{3}} x_i dx_i = 0; \quad M\xi_i\xi_j = \frac{1}{(2\sqrt{3})^2}\int\limits_{-\sqrt{3}}^{+\sqrt{3}}\int\limits_{-\sqrt{3}}^{+\sqrt{3}} x_i x_j dx_i dx_j = 0 \quad (i \ne j,\ i,j = 1,2,3),$$

$$M\xi_i^2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\int\limits_{-\sqrt{3}}^{+\sqrt{3}} x_i^2 dx_i = \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\left.\frac{x_i^3}{3}\right|_{-\sqrt{3}}^{+\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{3})^3}{2\cdot 3\sqrt{3}} = 1 \quad (i = 1,2,3).$$

Сонымен

$$\operatorname{cov}(\xi,\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. (ξ,η) – $D=\left\{(x,y): x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0, y\ge 0\right\}$ жарты дөңгелегінде бірқалыпты үлестірілген кездейсоқ нүктенің координатасы. Корреляция коэффициенті болатын $\rho(\xi,\eta)=\dfrac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}$ шамасын табыңыз, мұндағы $\operatorname{cov}(\xi,\eta)=$ $=M(\xi-M\xi)(\eta-M\eta)=M\xi\eta-M\xi\cdot M\eta$ – ξ және η кездейсоқ шамаларының ковариациясы.

Шешуі. Бізде бірлескен үлестірім тығыздығы $f_{\xi,\eta}(x,y)=\dfrac{4}{\pi}$, егер $(x,y)\in D$ болса; $f_{\xi,\eta}(x,y)=0$, егер $(x,y)\notin D$ болса. Онда $0\le x\le 1$ үшін

$$f_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(x,y)dy=\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{4}{\pi}dy=\frac{4}{\pi}\sqrt{1-x^2}\ .$$

Ендеше (10) және (13)-формулаларға сәйкес

$$M\xi=\frac{4}{\pi}\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx=-\frac{2}{\pi}\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,d\left(1-x^2\right)=-\frac{2}{\pi}\left.\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1=\frac{4}{3\pi},$$

$$M\xi\eta=\iint_D xy\cdot\frac{4}{\pi}dxdy=\frac{4}{\pi}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}xydydx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^1 x(1-x^2)dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)_0^1=\frac{1}{2\pi},$$

$$M\xi^2=\frac{4}{\pi}\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 tdt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)dt=\frac{1}{4}.$$

Сол сияқты (симметриялықты еске алсақ)

$$M\eta=\frac{4}{3\pi},\ M\eta^2=\frac{1}{4}.$$

Ендеше $D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2$ қасиеті бойынша

$$D\xi=D\eta=\frac{1}{4}-\left(\frac{4}{3\pi}\right)^2=\frac{9\pi^2-16}{36\pi^2}.$$

Онда корреляция коэффициенті

$$\rho(\xi,\eta)=\frac{M\xi\eta-M\xi\cdot M\eta}{\sqrt{D\xi}\cdot\sqrt{D\eta}}=\frac{\frac{1}{2\pi}-\frac{4}{3\pi}\cdot\frac{4}{3\pi}}{\frac{9\pi^2-16}{36\pi^2}}=\frac{2(9\pi-32)}{9\pi^2-16}.$$

5. ξ_1, ξ_2 кездейсоқ шамаларының бірлескен үлестірім тығыздығы былай анықталсын: $f_{\xi_1,\xi_2}(x,y) = \dfrac{2}{\pi(x^2+y^2)^3}$, егер $x^2+y^2 \geq 1$ болса; $f_{\xi_1,\xi_2}(x,y) = 0$, егер $x^2+y^2 < 1$ болса. $M\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}$ және $D\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}$ шамаларын табыңыз.

Шешуі. (13)-формула бойынша

$$M\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2} == \iint\limits_{x_1^2+x_2^2 \geq 1} \sqrt{x_1^2+x_2^2} \cdot \frac{2}{\pi\left(x_1^2+x_2^2\right)^3} dx_1 dx_2 .$$

Полярлық координаталарға көшсек ($x_1 = \rho\cos\varphi$, $x_2 = \rho\sin\varphi$, якобианның модулі ρ-ға тең), онда

$$M\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2} = \int_1^{\infty}\int_0^{2\pi} \rho \cdot \frac{2}{\pi\rho^6} \cdot \rho\, d\rho\, d\varphi = -\frac{4}{3\rho^3}\bigg|_1^{\infty} = \frac{4}{3},$$

$$M(\xi_1^2+\xi_2^2) = \int_1^{\infty}\int_0^{2\pi} \rho^2 \cdot \frac{2}{\pi\rho^6} \cdot \rho\, d\rho\, d\varphi = -\frac{4}{2\rho^2}\bigg|_1^{\infty} = 2,$$

$$D\left(\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}\right) = M\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right) - \left(M\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}\right)^2 = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}.$$